

Tentamen Complexe Analyse
09/02/11, 09.00–12.00 uur

1. (a) Bepaal de Laurentreeks voor de functie

$$\frac{\sin 2z}{z^3}$$

voor $|z| > 0$. Wat is het maximale gebied waarop de Laurentreeks convergeert? Beargumenteer Uw antwoord.

- (b) Bereken de integraal

$$\oint_{|z|=1} e^{1/z} \sin(1/z) dz.$$

Laat zien welke argumenten gebruikt worden.

2. Bereken met behulp van residuenrekening de trigonometrische integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos \theta}.$$

Geef duidelijk alle stappen in Uw argument weer.

3. Bereken de oneigenlijke integraal

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \sin 3x}{x^2 + 4} dx.$$

Geef duidelijk aan van welke contour gebruik gemaakt wordt en van welke argumenten gebruik gemaakt wordt.

4. Voor $z \in D$ met $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ definieer de functie

$$f(z) = \frac{e^z}{3-z}.$$

Toon aan dat $|f(z)|$ een maximum heeft in D en bepaal dit maximum. Geef duidelijk aan van welke argumenten gebruik gemaakt wordt.

zie ommezijde

5. Definieer de 2π -periodieke functie $F(t)$ door

$$F(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0, \\ 1, & 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Bepaal de bijbehorende complexe Fourier-coëfficiënten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Bepaal de som van de Fourier reeks

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

voor elke $t \in [-\pi, \pi]$.

(c) Bepaal met behulp van de gelijkheid van Parseval de som

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

(d) Bepaal met behulp van het voorgaande resultaat de som

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$